

信号传播速度未知下基于运动单站到达频率的定位新方法

王 鼎^{1,3}, 尹洁昕^{1,3}, 郑娜娥², 聂福全⁴

(1. 中国人民解放军战略支援部队信息工程大学信息工程学院, 河南郑州 450001;
2. 中国人民解放军战略支援部队信息工程大学数据与目标工程学院, 河南郑州 450001;
3. 国家数字交换系统工程技术研究中心, 河南郑州 450002; 4. 卫华集团有限公司, 河南长垣 453400)

摘 要: 基于运动单站到达频率的目标定位是一类重要定位技术, 现有到达频率定位方法均认为信号传播速度精确已知, 但在一些场景中传播速度可能无法准确获得, 这会产生较大影响. 针对该问题, 本文提出信号传播速度未知下基于运动单站到达频率的目标定位新方法, 其包含两个阶段. 阶段1利用运动单站与目标间的几何关系构建第1组伪线性观测方程, 并基于此提出目标位置和信号传播速度解耦优化算法; 阶段2从最初到达频率观测模型出发构建第2组伪线性观测方程, 并将阶段1估计结果融入该观测方程, 以获得全部参数闭式解. 新方法仅需对信号传播速度进行迭代, 无需目标位置初始值, 可降低局部收敛的风险. 最后, 文中通过理论性能分析证明新方法的渐近统计最优性, 并利用仿真实验验证新方法的优越性.

关键词: 目标定位; 到达频率; 运动单站; 信号传播速度; 解耦优化; 理论性能分析

中图分类号: TN911 文献标识码: A 文章编号: 0372-2112(2022)05-1181-11

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.12263/DZXB.20210852

A FOA-Based Localization Method for Moving Single Station Under Unknown Signal Propagation Speed

WANG Ding^{1,3}, YIN Jie-xin^{1,3}, ZHENG Na-e², NIE Fu-quan⁴

(1. Institute of Information System Engineering, PLA Strategic Support Force Information Engineering University, Zhengzhou, Henan 450001, China; 2. Institute of Data and Target Engineering, PLA Strategic Support Force Information Engineering University, Zhengzhou, Henan 450001, China;
3. National Digital Switching System Engineering and Technology Research Center, Zhengzhou, Henan 450002, China;
4. Weihua Group Co., Ltd, Changyuan, Henan 453400, China)

Abstract: Target localization based on the frequency of arrival(FOA) observations for moving single station is an important location technology. All the existing FOA-based localization methods assume that the signal propagation speed is accurately known. However, in some positioning scenarios, the exact signal propagation speed may not be available, which will lead to negative influence. Aiming at this problem, this paper proposes a FOA-based localization method for moving single station with unknown signal propagation speed. The proposed method consists of two stages. Specifically, stage one constructs the first set of pseudo-linear equations based on the geometric relationship between the moving single station and the target, and then the target location and the signal propagation speed can be estimated in a decoupled manner. In stage two, the second set of pseudo-linear equations is formed from the original FOA measurement model, and the estimation results of stage one are incorporated into the second set of equations to obtain the closed-form solution to all the unknowns. The proposed method only performs iteration with respect to the signal propagation speed, and it does not need to choose the initial value of the source position. Hence, the risk of suffering from local convergence can be greatly reduced. Finally, the asymptotic efficiency of the proposed estimator is proved by theoretical performance analysis, and the superiority of the presented method is verified by some simulation experiments.

Key words: target localization; frequency of arrival; moving single station; signal propagation speed; decoupled optimization; theoretical performance analysis

1 引言

众所周知,目标定位技术在无线监测、地震勘测、紧急救助、安全管理等工业信息领域发挥重要作用^[1-3]. 依据观测站数量可以将目标定位系统分成单站定位系统和多站定位系统两大类,其中单站定位系统具有灵活性高、机动性强、系统简洁以及无需站间通信和同步等优点,本文主要研究单站定位方法.

单站定位系统常使用序列观测量进行定位,其中到达频率(Frequency Of Arrival, FOA)是常用的定位观测量,该观测量包含多普勒频移信息,可用于对窄带信号进行高精度定位. 近年来,国内外学者提出若干基于 FOA 观测量的目标定位方法. 文献[4, 5]提出基于网格搜索的 FOA 定位方法,该类方法需要复杂运算,其定位精度和计算复杂度取决于搜索区间和步长. 文献[6~8]提出基于信号数据的 FOA 直接定位方法,该类方法从传感器接收信号中直接获取目标位置坐标,需要多维迭代,易出现局部收敛和发散等问题,并且计算复杂度较高. 文献[9]提出基于半正定松弛 FOA 定位方法,该类方法无需设置初始值,可避免局部收敛和发散,但需要凸松弛处理,因此其渐近统计最优性尚没有完备的理论做支撑,并且计算复杂度较高. 为了避免迭代,文献[10, 11]提出基于加权最小二乘估计的闭式定位方法,该类方法能获得目标位置向量表达式,但是其联合了 FOA 和到达角度观测量,因此观测站需要安装天线阵列. 文献[12]提出一种加权辅助变量定位方法,其是一种可以有效削减估计偏置的 FOA 闭式定位方法,无需联合其他观测信息,但是该方法是以牺牲 FOA 观测量为代价,因此其估计方差无法渐近逼近克拉美罗界(Cramér-Rao Bound, CRB).

上述定位方法均假设信号传播速度精确已知,但在某些场景中(例如水下声源定位、地震波定位等),信号传播速度可能无法精确获得,这将对定位方法产生较大影响,此时应将信号传播速度看成未知参数. 文献[13]提出信号传播速度未知下基于到达时延观测量的无线传感网节点定位方法. 文献[14]提出信号传播速度不等式约束下联合到达时延和到达角度观测量的无线传感网节点定位方法. 文献[15~17]提出信号传播速度未知下基于到达时延差观测量的目标定位方法. 事实上,信号传播速度除了决定信号传播距离外,还影响多普勒频移,文献[18]提出信号传播速度未知下联合到达时延差和到达频率差观测量的目标定位方法. 上面提到的信号传播速度未知下的定位方法均可应用于水下声源定位场景,并且都需要分布式传感器来实现定位. 文献[12, 19]讨论了基于运动单传感器的水

下声源定位方法,文献[9]中的静止多站 FOA 定位方法也可等价于基于运动单站的 FOA 定位方法,然而文献[9, 12, 19]中的方法都需要精确的信号传播速度,这在水下声源定位场景中难以得到满足.

基于研究现状,本文在信号传播速度未知下提出运动单站 FOA 定位新方法. 该方法包含两个阶段,能实现目标位置向量和信号传播速度联合估计. 本文还通过理论分析证明新方法参数估计均方误差可以渐近逼近 CRB.

2 定位观测模型

假设在 3 维空间中有单个运动观测站利用 FOA 观测量对静止目标进行定位,该观测平台安装传感器,由于传感器与目标间的相对运动会使得 FOA 观测量中包含多普勒频移,利用此信息可以对目标进行定位. 传感器的运动轨迹由 M 个直线段构成,其在行驶第 m 条直线航迹过程中利用 N_m 个短时段测量 FOA,其中第 n 个短时段获得的 FOA 表达式为

$$f_{mn} = f_0 \left(1 + \frac{\dot{\mathbf{s}}_{mn}^T (\mathbf{u} - \mathbf{s}_{mn})}{c \|\mathbf{u} - \mathbf{s}_{mn}\|_2} \right), \quad 1 \leq n \leq N_m, \quad 1 \leq m \leq M \quad (1)$$

式中 f_0 表示信号发射频率; c 表示信号传播速度; $\mathbf{u} = [x^{(u)} y^{(u)} z^{(u)}]^T$ 表示目标位置向量; $\mathbf{s}_{mn} = [x_{mn}^{(s)} y_{mn}^{(s)} z_{mn}^{(s)}]^T$ 和 $\dot{\mathbf{s}}_{mn} = [\dot{x}_{mn}^{(s)} \dot{y}_{mn}^{(s)} \dot{z}_{mn}^{(s)}]^T$ 分别表示传感器在第 n 个时段的位置向量和速度向量.

这里给出两点假设:(1)本文的单站定位区域并不宽广,可假定信号在不同时段到达传感器的传播速度 c 保持不变,但需要将其看成是未知参数;(2)在每个短时段内,传感器测量 FOA 的时间足够短,使得传感器在每个短时段内的位置变化量可以忽略不计.

实际中获得的 FOA 观测量是含有误差的,其可以表示为

$$\hat{f}_{mn} = f_{mn} + \varepsilon_{mn}, \quad 1 \leq n \leq N_m, \quad 1 \leq m \leq M \quad (2)$$

式中 ε_{mn} 表示 FOA 观测误差. 将式(2)合并成向量形式可得

$$\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{f} + \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{g}(\mathbf{u}, c) + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3)$$

式(3)中,

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{f}} = [\hat{f}_1^T \hat{f}_2^T \cdots \hat{f}_M^T]^T, & \boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_1^T \varepsilon_2^T \cdots \varepsilon_M^T]^T \\ \mathbf{f} = \mathbf{g}(\mathbf{u}, c) = [f_1^T f_2^T \cdots f_M^T]^T \end{cases} \quad (4)$$

其中, $\hat{\mathbf{f}}_m = [\hat{f}_{m1} \hat{f}_{m2} \cdots \hat{f}_{mN_m}]^T$; $\mathbf{f}_m = [f_{m1} f_{m2} \cdots f_{mN_m}]^T$; $\boldsymbol{\varepsilon}_m = [\varepsilon_{m1} \varepsilon_{m2} \cdots \varepsilon_{mN_m}]^T$. 观测误差向量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 服从均值为零、协方差矩阵为 $\mathbf{Q} = E[\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^T]$ 的高斯分布. 若令 $N = \sum_{m=1}^M N_m$, 则观

测向量 \hat{f} 的长度为 N 。

3 参数估计方差的克拉美罗界

在本文的定位问题中,未知参数包括向量 \mathbf{u} 和标量 c , 观测量为向量 \hat{f} 。定义参数向量 $\boldsymbol{\theta}=[\mathbf{u}^T c]^T$, 此时可以将对数似然函数表示为

$$\ln(p(\hat{f}|\boldsymbol{\theta}))=K-\frac{1}{2}(\hat{f}-\mathbf{g}(\mathbf{u},c))^T\mathbf{Q}^{-1}(\hat{f}-\mathbf{g}(\mathbf{u},c)) \quad (5)$$

式(5)中 K 表示与未知参数 $\boldsymbol{\theta}$ 无关的常数。由式(5)可以得到关于参数向量 $\boldsymbol{\theta}$ 的 CRB 表达式:

$$\text{CRB}(\boldsymbol{\theta})=\left[\begin{pmatrix} \dot{G}_1(\mathbf{u},c) \\ \dot{G}_2(\mathbf{u},c) \end{pmatrix}^T \mathbf{Q}^{-1} \begin{pmatrix} \dot{G}_1(\mathbf{u},c) \\ \dot{G}_2(\mathbf{u},c) \end{pmatrix}\right]^{-1} \quad (6)$$

式(6)中 $\dot{G}_1(\mathbf{u},c)=\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{u},c)}{\partial \mathbf{u}^T}$ 和 $\dot{G}_2(\mathbf{u},c)=\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{u},c)}{\partial c}$ 。

4 两阶段定位新方法

4.1 新方法的原理概述

文中的新方法包含两个阶段,每个阶段的基本原

理描述如下:

(1)阶段1首先利用运动单站与目标间的几何关系构建第1组伪线性观测方程;然后利用该方程建立估计准则,并基于此实现向量 \mathbf{u} 和标量 c 的解耦合优化,其中仅需对标量 c 进行1维参数迭代,而向量 \mathbf{u} 的解是以闭式解形式给出;最后分析估计结果的统计特性。需要指出的是,阶段1中观测方程个数小于 FOA 观测量个数 N , 因此其无法获得渐近统计最优估计值。

(2)阶段2利用最初 FOA 观测模型构建第2组伪线性观测方程,并基于阶段1得到的估计值及其统计特性建立估计准则,进而获得参数向量 $\boldsymbol{\theta}$ 的闭式解,该估计结果具有渐近统计最优性。

基于上面的原理概述,图1描述了新方法的总体技术路线。

4.2 阶段1的计算原理与方法

4.2.1 伪线性观测方程

这里借助几何关系推导第1组伪线性观测方程。如图2所示,定义向量 $\mathbf{u}-\mathbf{s}_{mn}$ 与速度向量 $\dot{\mathbf{s}}_{mn}$ 之间的夹角为 β_{mn} , 则有

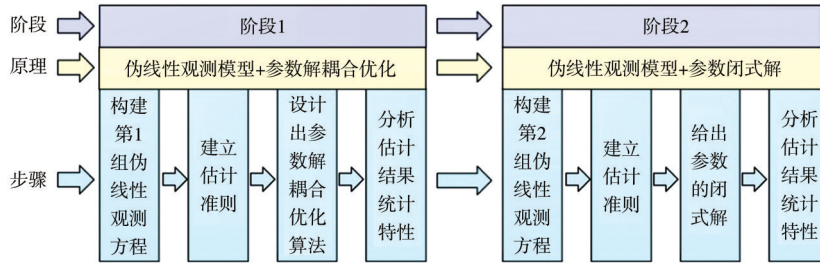


图1 新方法的总体技术路线图

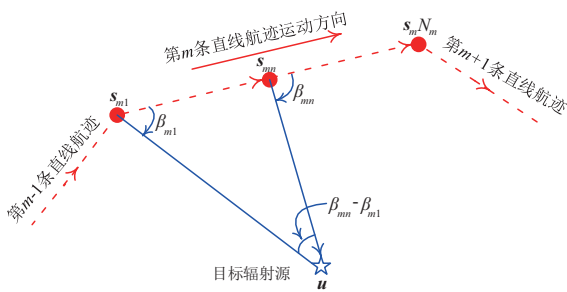


图2 定位几何关系示意图

$$\cos(\beta_{mn})=\frac{\dot{\mathbf{s}}_{mn}^T(\mathbf{u}-\mathbf{s}_{mn})}{\|\mathbf{u}-\mathbf{s}_{mn}\|_2\|\dot{\mathbf{s}}_{mn}\|_2}, 1 \leq n \leq N_m, 1 \leq m \leq M \quad (7)$$

结合式(1)和式(7)可得

$$\beta_{mn}=\arccos\left[\frac{c}{\|\dot{\mathbf{s}}_{mn}\|_2}\left(\frac{f_{mn}}{f_0}-1\right)\right] \quad (8)$$

由式(8)可知,夹角 β_{mn} 与 FOA 真实值 f_{mn} 以及信号传播速度 c 有关。

在图2中考虑由向量 $\mathbf{u}, \mathbf{s}_{mn}$ 以及 \mathbf{s}_{m1} 构成的三角形,

当 $n \geq 2$ 时,利用三角形正弦定理可知

$$\frac{\|\mathbf{u}-\mathbf{s}_{mn}\|_2}{\sin(\beta_{m1})}=\frac{\|\mathbf{s}_{mn}-\mathbf{s}_{m1}\|_2}{\sin(\beta_{mn}-\beta_{m1})}, 1 \leq m \leq M, 2 \leq n \leq N_m \quad (9)$$

结合式(7)和式(9)可得

$$\begin{aligned} &\sin(\beta_{mn}-\beta_{m1})\dot{\mathbf{s}}_{mn}^T\mathbf{u} \\ &=\|\mathbf{s}_{mn}-\mathbf{s}_{m1}\|_2\|\dot{\mathbf{s}}_{mn}\|_2\sin(\beta_{m1})\cos(\beta_{mn}) \\ &\quad +\sin(\beta_{mn}-\beta_{m1})\dot{\mathbf{s}}_{mn}^T\mathbf{s}_{mn}, 1 \leq m \leq M, 2 \leq n \leq N_m \end{aligned} \quad (10)$$

将式(10)写成矩阵形式可得

$$A(\mathbf{f},c)\mathbf{u}=\mathbf{b}(\mathbf{f},c) \quad (11)$$

式(11)中,

$$\begin{cases} A(\mathbf{f},c)=[(A_1(\mathbf{f}_1,c))^T(A_2(\mathbf{f}_2,c))^T \cdots (A_M(\mathbf{f}_M,c))^T]^T \\ \mathbf{b}(\mathbf{f},c)=[(b_1(\mathbf{f}_1,c))^T(b_2(\mathbf{f}_2,c))^T \cdots (b_M(\mathbf{f}_M,c))^T]^T \end{cases} \quad (12)$$

其中,

$$A_m(\mathbf{f}_m,c)=\begin{bmatrix} \sin(\beta_{m2}-\beta_{m1})\dot{\mathbf{s}}_{m2}^T \\ \sin(\beta_{m3}-\beta_{m1})\dot{\mathbf{s}}_{m3}^T \\ \vdots \\ \sin(\beta_{mN_m}-\beta_{m1})\dot{\mathbf{s}}_{mN_m}^T \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$b_m(\mathbf{f}_m, c) = \begin{bmatrix} \|\mathbf{s}_{m2} - \mathbf{s}_{m1}\|_2 \|\dot{\mathbf{s}}_{m2}\|_2 \sin(\beta_{m1}) \cos(\beta_{m2}) + \sin(\beta_{m2} - \beta_{m1}) \dot{\mathbf{s}}_{m2}^T \mathbf{s}_{m2} \\ \|\mathbf{s}_{m3} - \mathbf{s}_{m1}\|_2 \|\dot{\mathbf{s}}_{m3}\|_2 \sin(\beta_{m1}) \cos(\beta_{m3}) + \sin(\beta_{m3} - \beta_{m1}) \dot{\mathbf{s}}_{m3}^T \mathbf{s}_{m3} \\ \vdots \\ \|\mathbf{s}_{mN_m} - \mathbf{s}_{m1}\|_2 \|\dot{\mathbf{s}}_{mN_m}\|_2 \sin(\beta_{m1}) \cos(\beta_{mN_m}) + \sin(\beta_{mN_m} - \beta_{m1}) \dot{\mathbf{s}}_{mN_m}^T \mathbf{s}_{mN_m} \end{bmatrix} \quad (14)$$

式(11)即为第1组伪线性观测方程,其中 $A(\mathbf{f}, c)$ 表示伪线性观测矩阵; $b(\mathbf{f}, c)$ 表示伪线性观测向量。

由于式(10)仅在 $n \geq 2$ 时成立,从而导致式(11)中包含的方程个数仅为 $N - M$,小于FOA观测量个数 N ,因此基于式(11)无法获得渐近统计最优的定位结果,但是其作为新方法的中间步骤仍然不可或缺。

4.2.2 估计准则及其求解算法

建立合理的估计准则需要分析伪线性观测方程中的误差特性,为此定义如下伪线性观测误差向量

$$\xi_f = b(\hat{\mathbf{f}}, c) - A(\hat{\mathbf{f}}, c)\mathbf{u} = \Delta b - \Delta A\mathbf{u} \quad (15)$$

式(15)中 $\Delta b = b(\hat{\mathbf{f}}, c) - b(\mathbf{f}, c)$; $\Delta A = A(\hat{\mathbf{f}}, c) - A(\mathbf{f}, c)$. 利用一阶误差分析方法可得

$$\Delta b \approx \dot{B}_1(\mathbf{f}, c)(\hat{\mathbf{f}} - \mathbf{f}) = \dot{B}_1(\mathbf{f}, c)\boldsymbol{\varepsilon} \quad (16)$$

$$\Delta A\mathbf{u} \approx [\dot{A}_{11}(\mathbf{f}_1, \mathbf{u}, c) \dot{A}_{12}(\mathbf{f}_2, \mathbf{u}, c) \cdots \dot{A}_{1M}(\mathbf{f}_M, \mathbf{u}, c)]\boldsymbol{\varepsilon} \quad (17)$$

式(17)中

$$\dot{B}_1(\mathbf{f}, c) = \frac{\partial b(\mathbf{f}, c)}{\partial \mathbf{f}^T} \quad (18)$$

$$\dot{A}_{1m}(\mathbf{f}_m, \mathbf{u}, c) = \begin{bmatrix} \frac{\partial A(\mathbf{f}, c)}{\partial f_{m1}} \mathbf{u} & \frac{\partial A(\mathbf{f}, c)}{\partial f_{m2}} \mathbf{u} & \cdots & \frac{\partial A(\mathbf{f}, c)}{\partial f_{mN_m}} \mathbf{u} \end{bmatrix} \quad (19)$$

将式(16)和式(17)代入式(15)中可知

$$\xi_f \approx C_1(\mathbf{f}, \mathbf{u}, c)\boldsymbol{\varepsilon} \quad (20)$$

式(20)中,

$$C_1(\mathbf{f}, \mathbf{u}, c) = \dot{B}_1(\mathbf{f}, c) - [\dot{A}_{11}(\mathbf{f}_1, \mathbf{u}, c) \dot{A}_{12}(\mathbf{f}_2, \mathbf{u}, c) \cdots \dot{A}_{1M}(\mathbf{f}_M, \mathbf{u}, c)] \quad (21)$$

由式(20)可知,误差向量 ξ_f 渐近服从零均值的高斯分布,并且其协方差矩阵为

$$\boldsymbol{\Omega}_f = E[\xi_f \xi_f^T] = C_1(\mathbf{f}, \mathbf{u}, c) \boldsymbol{Q}(C_1(\mathbf{f}, \mathbf{u}, c))^T \quad (22)$$

结合式(15)和式(22)可以建立如下加权最小二乘估计准则:

$$\min_{\mathbf{u}, c} \{J_f(\mathbf{u}, c)\} = \min_{\mathbf{u}, c} \{ \|\boldsymbol{\Omega}_f^{-1/2} b(\hat{\mathbf{f}}, c) - \boldsymbol{\Omega}_f^{-1/2} A(\hat{\mathbf{f}}, c)\mathbf{u}\|_2^2 \} \quad (23)$$

为了减少参与迭代的变量维数,这里提出利用解耦优化的思想对式(23)进行求解. 首先可以得到向量 \mathbf{u} 在阶段1的最优表达式:

$$\hat{\mathbf{u}}_{f-\text{opt}}(c) = ((A(\hat{\mathbf{f}}, c))^T \boldsymbol{\Omega}_f^{-1} A(\hat{\mathbf{f}}, c))^{-1} (A(\hat{\mathbf{f}}, c))^T \boldsymbol{\Omega}_f^{-1} b(\hat{\mathbf{f}}, c) \quad (24)$$

然后将式(24)代入式(23)中可以得到仅关于标量 c 的优化问题

$$\min_c \{ \bar{J}_f(c) \}$$

$$= \min_c \{ (\boldsymbol{\Omega}_f^{-1/2} b(\hat{\mathbf{f}}, c))^T \Pi^\perp [\boldsymbol{\Omega}_f^{-1/2} A(\hat{\mathbf{f}}, c)] \boldsymbol{\Omega}_f^{-1/2} b(\hat{\mathbf{f}}, c) \} \quad (25)$$

式(25)中, $\Pi^\perp[\cdot]$ 表示矩阵列补空间上的正交投影函数. 式(25)是一维优化问题,可以通过Newton-Raphson迭代法进行求解,相应的迭代公式为

$$\hat{c}_f^{(k+1)} = \hat{c}_f^{(k)} - \mu^k \frac{\nabla_c \bar{J}_f(\hat{c}_f^{(k)})}{\nabla_c^2 \bar{J}_f(\hat{c}_f^{(k)})}, \quad 0 < \mu < 1 \quad (26)$$

式(26)中,

$$\nabla_c \bar{J}_f(\hat{c}_f^{(k)}) = \left. \frac{\partial \bar{J}_f(c)}{\partial c} \right|_{c=\hat{c}_f^{(k)}}, \quad \nabla_c^2 \bar{J}_f(\hat{c}_f^{(k)}) = \left. \frac{\partial^2 \bar{J}_f(c)}{\partial c^2} \right|_{c=\hat{c}_f^{(k)}}$$

式(26)的收敛值 $\hat{c}_f = \lim_{k \rightarrow +\infty} \hat{c}_f^{(k)}$ 即为标量 c 在阶段1中的估计结果,将其代入式(24)中即可得到向量 \mathbf{u} 在阶段1中的估计结果:

$$\hat{\mathbf{u}}_f = ((A(\hat{\mathbf{f}}, \hat{c}_f))^T \boldsymbol{\Omega}_f^{-1} A(\hat{\mathbf{f}}, \hat{c}_f))^{-1} (A(\hat{\mathbf{f}}, \hat{c}_f))^T \boldsymbol{\Omega}_f^{-1} b(\hat{\mathbf{f}}, \hat{c}_f) \quad (27)$$

由式(22)可知,加权矩阵 $\boldsymbol{\Omega}_f^{-1}$ 与目标位置向量 \mathbf{u} 和信号传播速度 c 有关,因此严格来说,式(23)中的目标函数 $J_f(\mathbf{u}, c)$ 并不是关于向量 \mathbf{u} 的二次函数. 庆幸的是,该问题并不难解决,可以首先将 $\boldsymbol{\Omega}_f^{-1}$ 设为单位矩阵,并分别利用式(26)和式(27)获得向量 \mathbf{u} 和标量 c 的近似估计值(分别记为 $\hat{\mathbf{u}}_0$ 和 \hat{c}_0),然后将 $\hat{\mathbf{u}}_0$ 和 \hat{c}_0 以及观测向量 $\hat{\mathbf{f}}$ 代入式(22)中获得加权矩阵 $\boldsymbol{\Omega}_f^{-1}$ 的近似估计值(记为 $\hat{\boldsymbol{\Omega}}_f^{-1}$),最后将加权矩阵 $\hat{\boldsymbol{\Omega}}_f^{-1}$ 代入式(26)和式(27)中求解参数. 容易验证 $\hat{\boldsymbol{\Omega}}_f^{-1}$ 是 $\boldsymbol{\Omega}_f^{-1}$ 的一致估计值,理论分析表明^[20],在一阶误差分析理论框架下,加权矩阵 $\boldsymbol{\Omega}_f^{-1}$ 的一致估计值 $\hat{\boldsymbol{\Omega}}_f^{-1}$ 中的扰动误差并不会实质影响估计值 $\hat{\mathbf{u}}_f$ 和 \hat{c}_f 的统计性能.

4.2.3 理论性能分析

下面推导阶段1中的估计值的统计特性,具体结论可见如下两个定理.

定理1 向量 $\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_f \\ \hat{c}_f \end{bmatrix}$ 是关于参数向量 $\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ c \end{bmatrix}$ 的渐近统计无偏估计值,并且其均方误差矩阵为

$$\text{MSE} \left(\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_f \\ \hat{c}_f \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} (A(\mathbf{f}, c))^T \\ -(C_2(\mathbf{f}, \mathbf{u}, c))^T \end{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_f^{-1} \begin{bmatrix} A(\mathbf{f}, c) & -C_2(\mathbf{f}, \mathbf{u}, c) \end{bmatrix} \right)^{-1} \quad (28)$$

式(28)中,

$$C_2(\mathbf{f}, \mathbf{u}, c) = \dot{B}_2(\mathbf{f}, c) - \dot{A}_2(\mathbf{f}, c)\mathbf{u} \quad (29)$$

其中, $\dot{B}_2(\mathbf{f}, c) = \frac{\partial b(\mathbf{f}, c)}{\partial c}$ 和 $\dot{A}_2(\mathbf{f}, c) = \frac{\partial A(\mathbf{f}, c)}{\partial c}$.

证明 向量 $\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_f \\ \hat{\mathbf{c}}_f \end{bmatrix}$ 是如下优化问题的最优解:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_f \\ \hat{\mathbf{c}}_f \end{bmatrix} &= \arg \min_{\mathbf{u}, \mathbf{c}} \{ \hat{J}_f(\mathbf{u}, \mathbf{c}) \} \\ &= \arg \min_{\mathbf{u}, \mathbf{c}} \{ (b(\hat{\mathbf{f}}, \mathbf{c}) - A(\hat{\mathbf{f}}, \mathbf{c})\mathbf{u})^T \hat{\mathbf{\Omega}}_f^{-1} (b(\hat{\mathbf{f}}, \mathbf{c}) - A(\hat{\mathbf{f}}, \mathbf{c})\mathbf{u}) \} \end{aligned} \quad (30)$$

若将向量 $\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_f \\ \hat{\mathbf{c}}_f \end{bmatrix}$ 中的估计误差记为 $\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_f \\ \Delta \mathbf{c}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_f - \mathbf{u} \\ \hat{\mathbf{c}}_f - \mathbf{c} \end{bmatrix}$,

则利用文献[20]中的分析结论可得

$$\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_f \\ \Delta \mathbf{c}_f \end{bmatrix} \approx - \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_{N \times 1}} \nabla_{\theta\theta}^2 \hat{J}_f(\mathbf{u}, \mathbf{c}) \right)^{-1} \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_{N \times 1}} \nabla_{\theta\varepsilon}^2 \hat{J}_f(\mathbf{u}, \mathbf{c}) \right) \varepsilon \quad (31)$$

式(31)中,

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_{N \times 1}} \nabla_{\theta\theta}^2 \hat{J}_f(\mathbf{u}, \mathbf{c}) \\ &= 2 \begin{bmatrix} (A(\mathbf{f}, \mathbf{c}))^T \\ -(C_2(\mathbf{f}, \mathbf{u}, \mathbf{c}))^T \end{bmatrix} \mathbf{\Omega}_f^{-1} \begin{bmatrix} A(\mathbf{f}, \mathbf{c}) & -C_2(\mathbf{f}, \mathbf{u}, \mathbf{c}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (32)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_{N \times 1}} \nabla_{\theta\varepsilon}^2 \hat{J}_f(\mathbf{u}, \mathbf{c}) = 2 \begin{bmatrix} -(A(\mathbf{f}, \mathbf{c}))^T \\ (C_2(\mathbf{f}, \mathbf{u}, \mathbf{c}))^T \end{bmatrix} \mathbf{\Omega}_f^{-1} C_1(\mathbf{f}, \mathbf{u}, \mathbf{c}) \quad (33)$$

结合式(31)~式(33)可知,误差向量 $\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_f \\ \Delta \mathbf{c}_f \end{bmatrix}$ 渐近服

从零均值的高斯分布,因此向量 $\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_f \\ \hat{\mathbf{c}}_f \end{bmatrix}$ 是渐近统计无偏估计值,并且其均方误差矩阵为

$$\begin{aligned} &\text{MSE} \left(\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_f \\ \hat{\mathbf{c}}_f \end{bmatrix} \right) \\ &= \left(\begin{bmatrix} (A(\mathbf{f}, \mathbf{c}))^T \\ -(C_2(\mathbf{f}, \mathbf{u}, \mathbf{c}))^T \end{bmatrix} \mathbf{\Omega}_f^{-1} \begin{bmatrix} A(\mathbf{f}, \mathbf{c}) & -C_2(\mathbf{f}, \mathbf{u}, \mathbf{c}) \end{bmatrix} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (34)$$

证毕.

定理 2 向量 $\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_f \\ \hat{\mathbf{c}}_f \end{bmatrix}$ 并不是参数向量 $\theta = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{c} \end{bmatrix}$ 的渐近

统计最优估计值,即有 $\text{MSE} \left(\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_f \\ \hat{\mathbf{c}}_f \end{bmatrix} \right) \geq \text{CRB}(\theta)$.

证明 将式(22)代入式(28)中可得

$$\begin{aligned} &\text{MSE} \left(\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_f \\ \hat{\mathbf{c}}_f \end{bmatrix} \right) \\ &= \left(\begin{bmatrix} (A(\mathbf{f}, \mathbf{c}))^T \\ -(C_2(\mathbf{f}, \mathbf{u}, \mathbf{c}))^T \end{bmatrix} (C_1(\mathbf{f}, \mathbf{u}, \mathbf{c}) \mathbf{Q} (C_1(\mathbf{f}, \mathbf{u}, \mathbf{c}))^T)^{-1} \right. \\ &\quad \left. \times [A(\mathbf{f}, \mathbf{c}) \quad -C_2(\mathbf{f}, \mathbf{u}, \mathbf{c})] \right)^{-1} \end{aligned} \quad (35)$$

另一方面,将定义式 $\mathbf{f} = \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{c})$ 代入式(11)中可知

$$A(\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{c}), \mathbf{c})\mathbf{u} = b(\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{c}), \mathbf{c}) \quad (36)$$

将式(36)两边分别对 \mathbf{u} 和 \mathbf{c} 求导可得

$$A(\mathbf{f}, \mathbf{c}) = C_1(\mathbf{f}, \mathbf{u}, \mathbf{c}) \dot{G}_1(\mathbf{u}, \mathbf{c}) \quad (37)$$

$$C_2(\mathbf{f}, \mathbf{u}, \mathbf{c}) = -C_1(\mathbf{f}, \mathbf{u}, \mathbf{c}) \dot{G}_2(\mathbf{u}, \mathbf{c}) \quad (38)$$

将式(37)和式(38)代入式(35)中可知

$$\begin{aligned} &\text{MSE} \left(\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_f \\ \hat{\mathbf{c}}_f \end{bmatrix} \right) \\ &= \left(\begin{bmatrix} (\dot{G}_1(\mathbf{u}, \mathbf{c}))^T \\ (\dot{G}_2(\mathbf{u}, \mathbf{c}))^T \end{bmatrix} (C_1(\mathbf{f}, \mathbf{u}, \mathbf{c}))^T (C_1(\mathbf{f}, \mathbf{u}, \mathbf{c}) \mathbf{Q} (C_1(\mathbf{f}, \mathbf{u}, \mathbf{c}))^T)^{-1} \right. \\ &\quad \left. \times C_1(\mathbf{f}, \mathbf{u}, \mathbf{c}) [\dot{G}_1(\mathbf{u}, \mathbf{c}) \quad \dot{G}_2(\mathbf{u}, \mathbf{c})] \right)^{-1} \end{aligned} \quad (39)$$

结合式(6)、式(39)以及矩阵不等式 $\mathbf{A}^{-1} \geq \mathbf{B}(\mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T$ (其中, \mathbf{A} 为任意正定矩阵; \mathbf{B} 为任意列满秩矩阵)可得

$$\begin{aligned} &\left(\text{MSE} \left(\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_f \\ \hat{\mathbf{c}}_f \end{bmatrix} \right) \right)^{-1} \\ &\leq \begin{bmatrix} (\dot{G}_1(\mathbf{u}, \mathbf{c}))^T \\ (\dot{G}_2(\mathbf{u}, \mathbf{c}))^T \end{bmatrix} \mathbf{Q}^{-1} [\dot{G}_1(\mathbf{u}, \mathbf{c}) \quad \dot{G}_2(\mathbf{u}, \mathbf{c})] = (\text{CRB}(\theta))^{-1} \end{aligned} \quad (40)$$

$$\Rightarrow \text{MSE} \left(\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_f \\ \hat{\mathbf{c}}_f \end{bmatrix} \right) \geq \text{CRB}(\theta)$$

证毕.

定理 2 表明,观测方程个数的降低使得阶段 1 的估计值不具备渐近统计最优性,因此下面还需要利用阶段 2 对此估计值进行优化更新,旨在获得具有渐近统计最优性的估计结果.

4.3 阶段 2 的计算原理与方法

4.3.1 伪线性观测方程

若要获得渐近统计最优的定位精度,就不能减少观测方程个数,为此需要回到最初 FOA 观测模型式(1)中,并将其进一步转化成如下形式:

$$\begin{aligned} &\dot{\mathbf{s}}_{mn}^T \mathbf{u} + c(1 - f_{mn}/f_0) \|\mathbf{u} - \mathbf{s}_{mn}\|_2 \\ &= \dot{\mathbf{s}}_{mn}^T \mathbf{s}_{mn}, \quad 1 \leq n \leq N_m, \quad 1 \leq m \leq M \end{aligned} \quad (41)$$

将式(41)写成矩阵形式可得

$$H(\mathbf{f}, \mathbf{u}) \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{c} \end{bmatrix} = H(\mathbf{f}, \mathbf{u}) \theta = \mathbf{w} \quad (42)$$

式(42)中,

$$\begin{cases} \mathbf{w} = [\mathbf{w}_1^T \quad \mathbf{w}_2^T \quad \cdots \quad \mathbf{w}_M^T]^T \\ H(\mathbf{f}, \mathbf{u}) = [(H_1(\mathbf{f}_1, \mathbf{u}))^T \quad (H_2(\mathbf{f}_2, \mathbf{u}))^T \quad \cdots \quad (H_M(\mathbf{f}_M, \mathbf{u}))^T]^T \end{cases} \quad (43)$$

其中,

$$\begin{cases} H_m(\mathbf{f}_m, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{s}}_{m1}^T & (1 - f_{m1}/f_0) \|\mathbf{u} - \mathbf{s}_{m1}\|_2 \\ \dot{\mathbf{s}}_{m2}^T & (1 - f_{m2}/f_0) \|\mathbf{u} - \mathbf{s}_{m2}\|_2 \\ \vdots & \vdots \\ \dot{\mathbf{s}}_{mN_m}^T & (1 - f_{mN_m}/f_0) \|\mathbf{u} - \mathbf{s}_{mN_m}\|_2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{w}_m = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{s}}_{m1}^T \mathbf{s}_{m1} \\ \dot{\mathbf{s}}_{m2}^T \mathbf{s}_{m2} \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{s}}_{mN_m}^T \mathbf{s}_{mN_m} \end{bmatrix}, \quad 1 \leq m \leq M \end{cases} \quad (44)$$

式(42)即为第2组伪线性观测方程,其中 $H(\mathbf{f}, \mathbf{u})$ 表示伪线性观测矩阵; \mathbf{w} 表示伪线性观测向量.

式(42)与式(11)的根本区别在于,式(42)中的方程个数等于FOA观测个数 N ,没有信息损失.事实上,在本文的新方法中,式(11)与式(42)都不可或缺.式(11)的意义为,提供渐近统计无偏估计值及其统计特性,正是基于此信息,才可以将式(42)中的观测矩阵 $H(\mathbf{f}, \mathbf{u})$ 看成已知量,进而在阶段2中得到参数向量 $\boldsymbol{\theta}$ 的闭式解;式(42)的意义为,提高阶段1的估计精度,并获得渐近统计最优估计值.

4.3.2 估计准则及其最优闭式解

首先定义如下伪线性观测误差向量:

$$\boldsymbol{\xi}_t = \mathbf{w} - H(\hat{\mathbf{f}}, \hat{\mathbf{u}}_t)\boldsymbol{\theta} = -\Delta H\boldsymbol{\theta} \quad (45)$$

式(45)中 $\Delta H = H(\hat{\mathbf{f}}, \hat{\mathbf{u}}_t) - H(\mathbf{f}, \mathbf{u})$. 利用一阶误差分析可得

$$\begin{aligned} \Delta H\boldsymbol{\theta} \approx & [\dot{H}_{11}(\mathbf{f}_1, \mathbf{u}, c)\dot{H}_{12}(\mathbf{f}_2, \mathbf{u}, c) \cdots \dot{H}_{1M}(\mathbf{f}_M, \mathbf{u}, c)]\boldsymbol{\varepsilon} \\ & + [\dot{H}_{21}(\mathbf{f}, \mathbf{u}, c)\dot{H}_{22}(\mathbf{f}, \mathbf{u}, c)\dot{H}_{23}(\mathbf{f}, \mathbf{u}, c)]\Delta\mathbf{u}_f \end{aligned} \quad (46)$$

式(46)中,

$$\begin{aligned} & \dot{H}_{1m}(\mathbf{f}_m, \mathbf{u}, c) \\ & = \left[\frac{\partial H(\mathbf{f}, \mathbf{u})}{\partial f_{m1}} \boldsymbol{\theta} \quad \frac{\partial H(\mathbf{f}, \mathbf{u})}{\partial f_{m2}} \boldsymbol{\theta} \quad \cdots \quad \frac{\partial H(\mathbf{f}, \mathbf{u})}{\partial f_{mN_m}} \boldsymbol{\theta} \right] \end{aligned} \quad (47)$$

$$\dot{H}_{2j}(\mathbf{f}, \mathbf{u}, c) = \frac{\partial H(\mathbf{f}, \mathbf{u})}{\partial \langle \mathbf{u} \rangle_j} \boldsymbol{\theta} \quad (48)$$

将式(31)和式(46)代入式(45)中可知

$$\boldsymbol{\xi}_t \approx R(\mathbf{f}, \mathbf{u}, c)\boldsymbol{\varepsilon} \quad (49)$$

式(49)中,

$$\begin{aligned} R(\mathbf{f}, \mathbf{u}, c) = & [\dot{H}_{21}(\mathbf{f}, \mathbf{u}, c)\dot{H}_{22}(\mathbf{f}, \mathbf{u}, c)\dot{H}_{23}(\mathbf{f}, \mathbf{u}, c)\mathbf{O}_{N \times 1}] \\ & \times \left(\lim_{\boldsymbol{\varepsilon} \rightarrow \mathbf{O}_{N \times 1}} \nabla_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}}^2 \hat{J}_f(\mathbf{u}, c) \right)^{-1} \left(\lim_{\boldsymbol{\varepsilon} \rightarrow \mathbf{O}_{N \times 1}} \nabla_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\varepsilon}}^2 \hat{J}_f(\mathbf{u}, c) \right) \\ & - [\dot{H}_{11}(\mathbf{f}_1, \mathbf{u}, c)\dot{H}_{12}(\mathbf{f}_2, \mathbf{u}, c) \cdots \dot{H}_{1M}(\mathbf{f}_M, \mathbf{u}, c)] \end{aligned} \quad (50)$$

由式(49)可知,误差向量 $\boldsymbol{\xi}_t$ 渐近服从零均值的高斯分布,并且其协方差矩阵为

$$\boldsymbol{\Omega}_t = E[\boldsymbol{\xi}_t \boldsymbol{\xi}_t^T] = R(\mathbf{f}, \mathbf{u}, c)\mathbf{Q}(R(\mathbf{f}, \mathbf{u}, c))^T \quad (51)$$

结合式(45)和式(51)可以建立如下加权最小二乘估计准则:

$$\begin{aligned} & \min_{\boldsymbol{\theta}} \{J_t(\boldsymbol{\theta})\} \\ & = \min_{\boldsymbol{\theta}} \{(\mathbf{w} - H(\hat{\mathbf{f}}, \hat{\mathbf{u}}_t)\boldsymbol{\theta})^T \boldsymbol{\Omega}_t^{-1} (\mathbf{w} - H(\hat{\mathbf{f}}, \hat{\mathbf{u}}_t)\boldsymbol{\theta})\} \end{aligned} \quad (52)$$

式(52)的最优闭式解为

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_t = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_t \\ \hat{c}_t \end{bmatrix} = ((H(\hat{\mathbf{f}}, \hat{\mathbf{u}}_t))^T \boldsymbol{\Omega}_t^{-1} H(\hat{\mathbf{f}}, \hat{\mathbf{u}}_t))^{-1} (H(\hat{\mathbf{f}}, \hat{\mathbf{u}}_t))^T \boldsymbol{\Omega}_t^{-1} \mathbf{w} \quad (53)$$

由式(51)可知,加权矩阵 $\boldsymbol{\Omega}_t^{-1}$ 与目标位置向量 \mathbf{u} 和信号传播速度 c 有关,因此严格来说,式(52)中的目标函数 $J_t(\boldsymbol{\theta})$ 并不是关于向量 $\boldsymbol{\theta}$ 的二次函数.庆幸的是,该问题并不难以解决,可以将阶段1中的估计值 $\hat{\mathbf{u}}_t$ 和 \hat{c}_t 以及观测向量 $\hat{\mathbf{f}}$ 代入式(51)中获得加权矩阵 $\boldsymbol{\Omega}_t^{-1}$ 的近似估计值(记为 $\hat{\boldsymbol{\Omega}}_t^{-1}$),然后将加权矩阵 $\hat{\boldsymbol{\Omega}}_t^{-1}$ 代入式(53)中求解参数.容易验证 $\hat{\boldsymbol{\Omega}}_t^{-1}$ 是 $\boldsymbol{\Omega}_t^{-1}$ 的一致估计值,理论分析表明^[20],在一阶误差分析理论框架下,加权矩阵 $\boldsymbol{\Omega}_t^{-1}$ 的一致估计值 $\hat{\boldsymbol{\Omega}}_t^{-1}$ 中的扰动误差并不会实质影响估计值 $\hat{\mathbf{u}}_t$ 和 \hat{c}_t 的统计性能.

5 定位新方法的理论性能分析

本节将推导估计值 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_t$ 的统计特性,具体结论可见如下两个定理.

定理3 向量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_t$ 是关于参数向量 $\boldsymbol{\theta}$ 的渐近统计无偏估计值,并且其均方误差矩阵为

$$\text{MSE}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_t) = ((H(\mathbf{f}, \mathbf{u}))^T \boldsymbol{\Omega}_t^{-1} H(\mathbf{f}, \mathbf{u}))^{-1} \quad (54)$$

证明 将向量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_t$ 中的估计误差记为 $\Delta\boldsymbol{\theta}_t = \hat{\boldsymbol{\theta}}_t - \boldsymbol{\theta}$. 基于式(53)可知

$$(H(\hat{\mathbf{f}}, \hat{\mathbf{u}}_t))^T \hat{\boldsymbol{\Omega}}_t^{-1} H(\hat{\mathbf{f}}, \hat{\mathbf{u}}_t)(\boldsymbol{\theta} + \Delta\boldsymbol{\theta}_t) = (H(\hat{\mathbf{f}}, \hat{\mathbf{u}}_t))^T \hat{\boldsymbol{\Omega}}_t^{-1} \mathbf{w} \quad (55)$$

在一阶误差分析框架下,由式(55)可以进一步推得

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_t \approx ((H(\mathbf{f}, \mathbf{u}))^T \boldsymbol{\Omega}_t^{-1} H(\mathbf{f}, \mathbf{u}))^{-1} (H(\mathbf{f}, \mathbf{u}))^T \boldsymbol{\Omega}_t^{-1} \boldsymbol{\xi}_t \quad (56)$$

式中 $\Delta\boldsymbol{\Xi}_t = \hat{\boldsymbol{\Omega}}_t^{-1} - \boldsymbol{\Omega}_t^{-1}$ 表示矩阵 $\hat{\boldsymbol{\Omega}}_t^{-1}$ 中的扰动误差.由式(56)可知,误差向量 $\Delta\boldsymbol{\theta}_t$ 渐近服从零均值的高斯分布,因此向量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_t$ 是渐近统计无偏估计值,并且其均方误差矩阵为

$$\text{MSE}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_t) = ((H(\mathbf{f}, \mathbf{u}))^T \boldsymbol{\Omega}_t^{-1} H(\mathbf{f}, \mathbf{u}))^{-1} \quad (57)$$

证毕.

定理4 向量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_t$ 是关于参数向量 $\boldsymbol{\theta}$ 的渐近统计最优估计值,即有 $\text{MSE}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_t) = \text{CRB}(\boldsymbol{\theta})$.

证明 将式(51)代入式(54)中可得

$$\begin{aligned} & \text{MSE}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_t) \\ & = ((H(\mathbf{f}, \mathbf{u}))^T (R(\mathbf{f}, \mathbf{u}, c))^{-T} \mathbf{Q}^{-1} (R(\mathbf{f}, \mathbf{u}, c))^{-1} H(\mathbf{f}, \mathbf{u}))^{-1} \end{aligned} \quad (58)$$

对比式(6)和式(58)可知,下面仅需要证明等式:

$$R(\mathbf{f}, \mathbf{u}, c)[\hat{G}_1(\mathbf{u}, c)\hat{G}_2(\mathbf{u}, c)] = H(\mathbf{f}, \mathbf{u}) \quad (59)$$

首先结合式(32)、式(33)以及式(50)可得

$$\begin{aligned}
 & R(\mathbf{f}, \mathbf{u}, c)[\dot{G}_1(\mathbf{u}, c) \dot{G}_2(\mathbf{u}, c)] \\
 &= -[\dot{H}_{11}(\mathbf{f}_1, \mathbf{u}, c) \dot{H}_{12}(\mathbf{f}_2, \mathbf{u}, c) \cdots \dot{H}_{1M}(\mathbf{f}_M, \mathbf{u}, c)][\dot{G}_1(\mathbf{u}, c) \dot{G}_2(\mathbf{u}, c)] \\
 &\quad -[\dot{H}_{21}(\mathbf{f}, \mathbf{u}, c) \dot{H}_{22}(\mathbf{f}, \mathbf{u}, c) \dot{H}_{23}(\mathbf{f}, \mathbf{u}, c) \mathbf{O}_{N \times 1}] \left[\begin{array}{c} (A(\mathbf{f}, c))^T \\ -(C_2(\mathbf{f}, \mathbf{u}, c))^T \end{array} \right] \mathbf{\Omega}_f^{-1} [A(\mathbf{f}, c) \quad -C_2(\mathbf{f}, \mathbf{u}, c)]^{-1} \\
 &\quad \times \left[\begin{array}{c} (A(\mathbf{f}, c))^T \\ -(C_2(\mathbf{f}, \mathbf{u}, c))^T \end{array} \right] \mathbf{\Omega}_f^{-1} [C_1(\mathbf{f}, \mathbf{u}, c) \dot{G}_1(\mathbf{u}, c) \quad C_1(\mathbf{f}, \mathbf{u}, c) \dot{G}_2(\mathbf{u}, c)] \quad (60)
 \end{aligned}$$

将式(37)和式(38)代入式(60)中可知

$$\begin{aligned}
 & R(\mathbf{f}, \mathbf{u}, c)[\dot{G}_1(\mathbf{u}, c) \dot{G}_2(\mathbf{u}, c)] \\
 &= -[\dot{H}_{21}(\mathbf{f}, \mathbf{u}, c) \dot{H}_{22}(\mathbf{f}, \mathbf{u}, c) \dot{H}_{23}(\mathbf{f}, \mathbf{u}, c) \mathbf{O}_{N \times 1}] \\
 &\quad -[\dot{H}_{11}(\mathbf{f}_1, \mathbf{u}, c) \dot{H}_{12}(\mathbf{f}_2, \mathbf{u}, c) \cdots \dot{H}_{1M}(\mathbf{f}_M, \mathbf{u}, c)][\dot{G}_1(\mathbf{u}, c) \dot{G}_2(\mathbf{u}, c)] \quad (61)
 \end{aligned}$$

另一方面,将定义式 $\mathbf{f}=\mathbf{g}(\mathbf{u}, c)$ 代入式(42)中可得

$$H(\mathbf{g}(\mathbf{u}, c), \mathbf{u}) \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ c \end{bmatrix} = H(\mathbf{g}(\mathbf{u}, c), \mathbf{u}) \boldsymbol{\theta} = \mathbf{w} \quad (62)$$

将式(62)两边分别对 \mathbf{u} 和 c 求导可知

$$\begin{aligned}
 & H(\mathbf{f}, \mathbf{u}) \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{O}_{1 \times 3} \end{bmatrix} \\
 &= -[\dot{H}_{11}(\mathbf{f}_1, \mathbf{u}, c) \dot{H}_{12}(\mathbf{f}_2, \mathbf{u}, c) \cdots \dot{H}_{1M}(\mathbf{f}_M, \mathbf{u}, c)] \dot{G}_1(\mathbf{u}, c) \\
 &\quad -[\dot{H}_{21}(\mathbf{f}, \mathbf{u}, c) \dot{H}_{22}(\mathbf{f}, \mathbf{u}, c) \dot{H}_{23}(\mathbf{f}, \mathbf{u}, c)] \quad (63)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & H(\mathbf{f}, \mathbf{u}) \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{3 \times 1} \\ 1 \end{bmatrix} \\
 &= -[\dot{H}_{11}(\mathbf{f}_1, \mathbf{u}, c) \dot{H}_{12}(\mathbf{f}_2, \mathbf{u}, c) \cdots \dot{H}_{1M}(\mathbf{f}_M, \mathbf{u}, c)] \dot{G}_2(\mathbf{u}, c) \quad (64)
 \end{aligned}$$

将式(63)和式(64)合并可得

$$\begin{aligned}
 H(\mathbf{f}, \mathbf{u}) &= -[\dot{H}_{21}(\mathbf{f}, \mathbf{u}, c) \dot{H}_{22}(\mathbf{f}, \mathbf{u}, c) \dot{H}_{23}(\mathbf{f}, \mathbf{u}, c) \mathbf{O}_{N \times 1}] \\
 &\quad -[\dot{H}_{11}(\mathbf{f}_1, \mathbf{u}, c) \dot{H}_{12}(\mathbf{f}_2, \mathbf{u}, c) \cdots \dot{H}_{1M}(\mathbf{f}_M, \mathbf{u}, c)][\dot{G}_1(\mathbf{u}, c) \dot{G}_2(\mathbf{u}, c)] \quad (65)
 \end{aligned}$$

结合式(61)和式(65)可知式(59)成立.

证毕.

6 仿真实验与结果分析

基础实验场景如下:假设水下目标位置向量为 $\mathbf{u}=[-200 \ 200 \ 300]^T$ m,水下目标信号发射频率为 $f_0=25$ kHz,现利用单观测平台对其进行定位,该平台在水下行驶4条直线航迹,每条航迹利用6个短间隙获得FOA观测量,短间隙位置坐标见表1和表2,该平台行驶每条直线航迹时的速度见表3. FOA观测误差服从均值为零、方差为 σ_f^2 的高斯分布,其中 σ_f 表示标准差.

表1 第1条和第2条航迹中的12个短间隙位置坐标

第1条航迹 短间隙序号 n	1	2	3	4	5	6	第2条航迹 短间隙序号 n	1	2	3	4	5	6
x 轴坐标/m	0	60	120	180	240	300	x 轴坐标/m	350	300	250	200	150	100
y 轴坐标/m	0	80	160	240	320	400	y 轴坐标/m	470	540	610	680	750	820
z 轴坐标/m	0	30	60	90	120	150	z 轴坐标/m	170	210	250	290	330	370

表2 第3条和第4条航迹中的12个短间隙位置坐标

第3条航迹 短间隙序号 n	1	2	3	4	5	6	第4条航迹 短间隙序号 n	1	2	3	4	5	6
x 轴坐标/m	60	20	-20	-60	-100	-140	x 轴坐标/m	-160	-180	-200	-220	-240	-260
y 轴坐标/m	880	940	1000	1060	1120	1180	y 轴坐标/m	1250	1170	1090	1010	930	850
z 轴坐标/m	400	350	300	250	200	150	z 轴坐标/m	110	100	90	80	70	60

表3 每条航迹的速度

航迹序号 m	1	2	3	4
x 轴速度/(m/s)	6	-5	-4	-2
y 轴速度/(m/s)	8	7	6	-8
z 轴速度/(m/s)	3	4	-5	-1

6.1 验证新方法的渐近统计最优性

首先设信号传播速度为 $c=1500$ m/s,改变目标位置,在 $[-250 \text{ m} \ -150 \text{ m}] \times [150 \text{ m} \ 250 \text{ m}] \times [250 \text{ m} \ 350 \text{ m}]$ 区间内服从均匀分布.图3给出新方法的定位均方根误差及其CRB随着FOA观测误差标准差 σ_f 的变化箱线图.

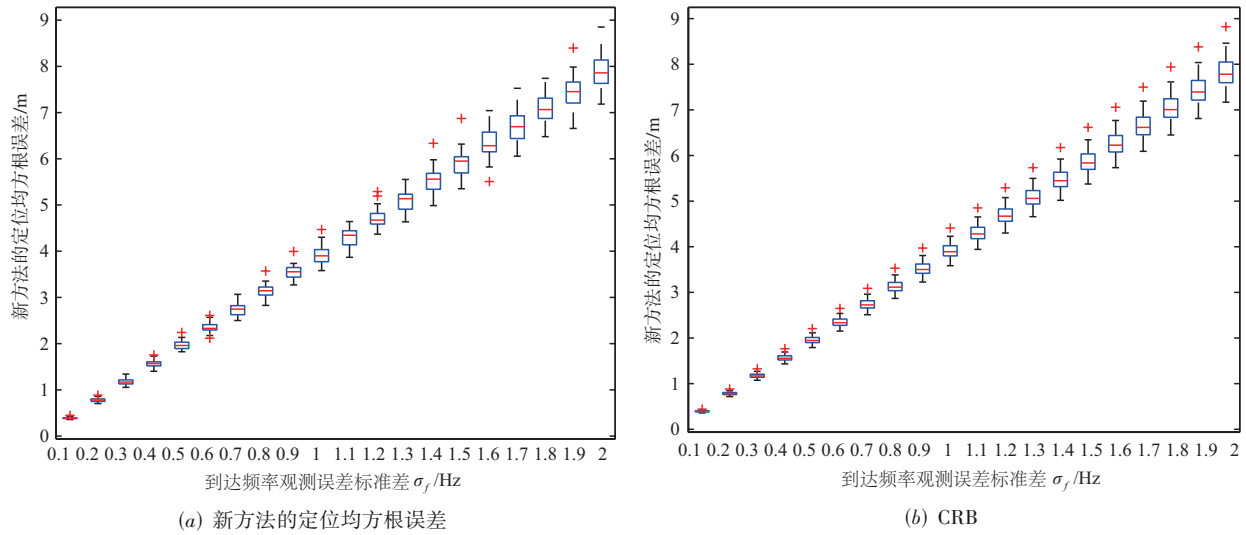


图3 新方法的定位均方根误差及其CRB随着FOA观测误差标准差 σ_f 的变化箱线图(目标位置坐标服从均匀分布)

然后假设目标位置向量为 $\mathbf{u} = [-200 \ 200 \ 300]^T$ m, 改变信号传播速度, 并参照文献[13~18]中的参数设置, 令其在[1400 1600] m/s 区间内服从均匀分布. 图4

给出新方法的定位均方根误差及其CRB随着FOA观测误差标准差 σ_f 的变化箱线图.

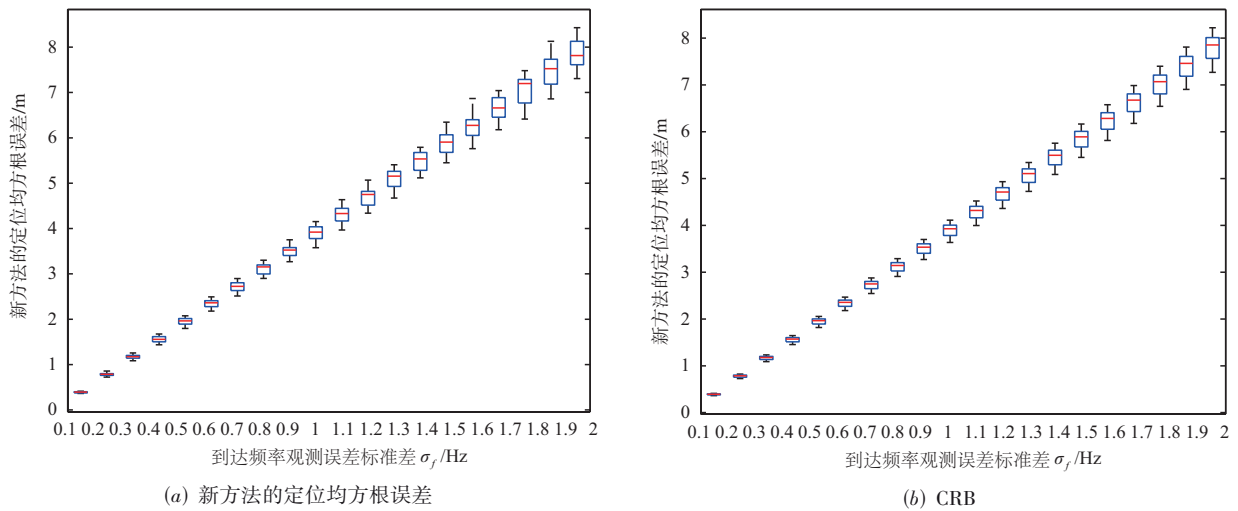


图4 新方法的定位均方根误差及其CRB随着FOA观测误差标准差 σ_f 的变化箱线图(信号传播速度服从均匀分布)

从图3和图4中可以看出:(1)新方法的定位均方根误差能够渐近逼近CRB,从而验证了新方法的渐近统计最优性;(2)新方法的渐近统计最优性对于目标位置坐标和信号传播速度具有一定泛化性.

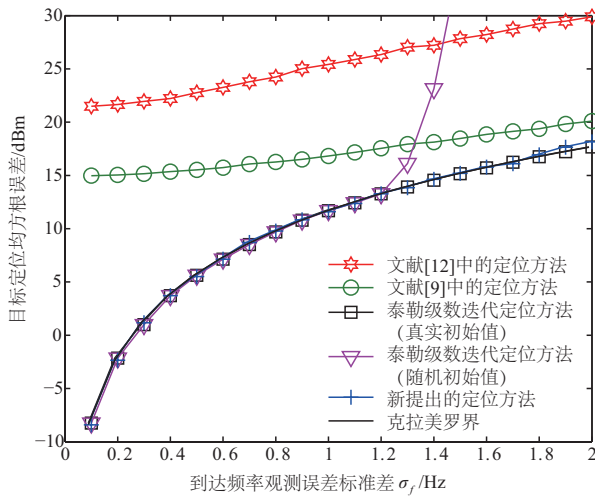
6.2 与已有定位方法进行比较

这里比较的方法包括泰勒级数迭代定位方法(涉及迭代初始值无误差和迭代初始值有随机误差

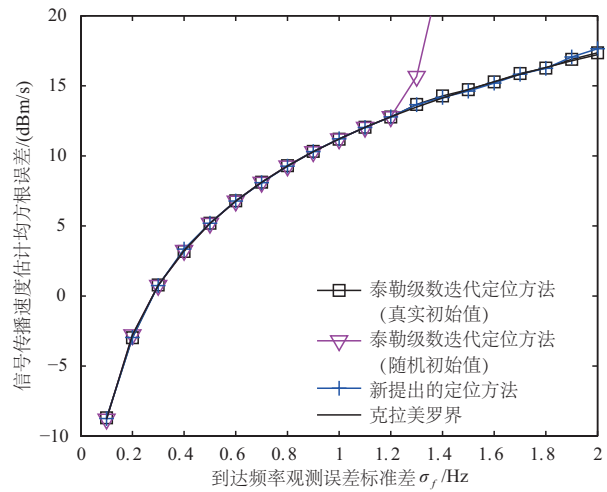
两种情形)和文献[9, 12]中的定位方法. 需要指出的是,文献[9, 12]中的定位方法假设信号传播速度精确已知,因此需要设定信号传播速度,这里取典型值 $c = 1500$ m/s. 此外,新方法与泰勒级数迭代定位方法均能对目标位置向量和信号传播速度进行联合估计,因此无需对这两种方法预先设定信号传播速度的数值.

首先假设信号传播速度为 $c=1470$ m/s. 图 5 给出了目标定位和信号传播速度估计均方根误差随着

FOA 观测误差标准差 σ_f 的变化曲线.



(a) 目标定位均方根误差曲线



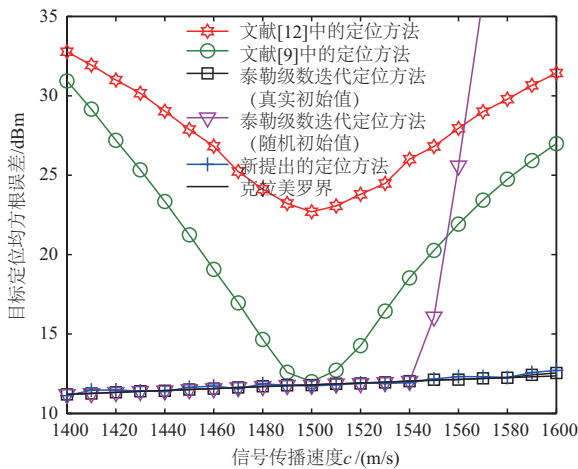
(b) 信号传播速度估计均方根误差曲线

图 5 目标定位和信号传播速度估计均方根误差随着 FOA 观测误差标准差 σ_f 的变化曲线

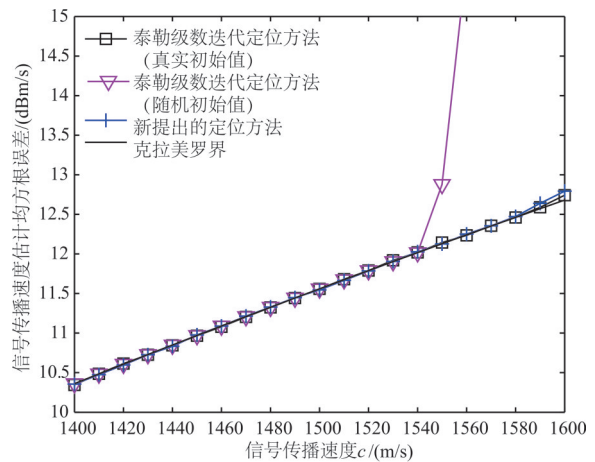
然后假设 FOA 观测误差标准差为 $\sigma_f=1$ Hz. 图 6 给出了目标定位和信号传播速度估计均方根误差随着信号传播速度 c 的变化曲线.

1500 m/s 时, 文献[9]中的定位方法的性能接近 CRB, 但文献[12]中的定位方法始终无法逼近 CRB, 这是因为后者虽然能够获得目标位置向量的闭式解, 但是以牺牲 FOA 观测量为代价, 因此其并不具有渐近统计最优性, 这与文献[12]中的结论一致; (3) 当泰勒级数迭代定位方法的初始值存在随机误差时, 其产生“门限效应”的误差阈值明显低于新提出的定位方法, 这是因为泰勒级数迭代定位方法是针对最初 FOA 观测方程进行迭代的, 其中没有推导伪线性观测方程, 因而

从图 5 和图 6 中可以看出: (1) 新提出的定位方法的性能可以渐近逼近 CRB; (2) 对于文献[9, 12]中的定位方法, 当信号传播速度的真实值偏离预先设定的典型值 $c=1500$ m/s 时, 两种方法的定位性能都会显著下降, 并且速度偏差值越大, 定位误差越大 (见图 6), 当信号传播速度的真实值等于预先给定的典型值 $c=$



(a) 目标定位均方根误差曲线



(b) 信号传播速度估计均方根误差曲线

图 6 目标定位和信号传播速度估计均方根误差随着信号传播速度 c 的变化曲线

难以获得合理的初始值,初始值中的随机误差很可能导致迭代发散,此时经有限次统计得到的定位均方根误差会出现“陡增”现象(即门限效应);(4)当泰勒级数迭代定位方法取真实值作为迭代初始值时,其估计精度与新方法接近,但将真实值作为迭代初始值在实际应用中难以实现.

7 结论

本文在信号传播速度未知下提出基于运动单站 FOA 观测量的目标定位新方法. 该方法共包含两个计算阶段,其中的迭代过程仅涉及一维参数优化,无需设置目标位置向量初始值,并能实现目标位置向量和信号传播速度联合估计. 此外,文中通过理论性能分析证明新方法的参数估计精度可以渐近逼近 CRB. 仿真实验结果表明,新方法具有渐近统计最优性,其性能优于文献[9, 12]中的定位方法,并且与迭代初始值取真实值的泰勒级数迭代定位方法相近,但新方法仅需对信号传播速度进行迭代,其计算复杂度更低.

参考文献

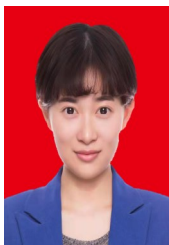
- [1] GOGINENI S, NEHORAI A. Target estimation using sparse modeling for distributed MIMO radar[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(11): 5315-5325.
- [2] LI S, DAKU B L F. Optimal amplitude weighting for near-field passive source localization[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(12): 6175-6185.
- [3] LIU C, ZAKHAROV Y V, CHEN T. Broadband underwater localization of multiple sources using basis pursuit denoising[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 60(4): 1708-1717.
- [4] CHAN Y T, TOWERS J J. Passive localization from Doppler-shifted frequency measurements[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1992, 40(10): 2594-2598.
- [5] 陆安南, 孔宪正. 单星测频无源定位法[J]. *通信学报*, 2004, 25(9): 160-168.
LU A N, KONG X Z. Passive localization from frequency measurements by single satellite[J]. *Journal on Communications*, 2004, 25(9): 160-168. (in Chinese)
- [6] AMAR A, WEISS A J. Localization of narrowband radio emitters based on doppler frequency shifts[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, 56(11): 5500-5508.
- [7] 王鼎, 张刚. 一种基于窄带信号多普勒频率测量的运动目标直接定位方法[J]. *电子学报*, 2017, 45(3): 591-598.
WANG D, ZHANG G. A direct localization method for moving narrowband source based on Doppler frequency shifts[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2017, 45(3): 591-598. (in Chinese)
- [8] WANG D, YIN J X, YU H Y. DPD algorithm for moving source based on Doppler frequency shifts: case of known waveforms[J]. *Chinese Journal of Electronics*, 2019, 28(5): 978-986.
- [9] AHMED M M, HO K C, WANG G. Localization of a moving source by frequency measurements[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2020, 68(8): 4839-4854.
- [10] SUN Y M, WAN Q. Position determination for moving transmitter using single station[J]. *IEEE Access*, 2018, 6(10): 61103-61116.
- [11] HAO K, XUE Q X, LI C, et al. A hybrid localization algorithm based on Doppler shift and AOA for an underwater mobile node[J]. *IEEE Access*, 2020, 8(10): 181662-181673.
- [12] NGUYEN N H, DOĞANÇAY K. Closed-form algebraic solutions for three-dimensional Doppler-only source localization[J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2018, 17(10): 6822-6836.
- [13] LUI K W K, MA W K, SO H C, et al. Semi-definite programming algorithms for sensor network node localization with uncertainties in anchor positions and/or propagation speed[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, 57(2): 752-763.
- [14] DIAMANT R, LAMPE L. Underwater localization with time-synchronization and propagation speed uncertainties [J]. *IEEE Transactions on Mobile Computing*, 2013, 12(7): 1257-1269.
- [15] ZHENG J, LUI K W K, SO H C. Accurate three-step algorithm for joint source position and propagation speed estimation[J]. *Signal Processing*, 2007, 87(12): 3096-3100.
- [16] ZOU Y B, LIU H P. TDOA localization with unknown signal propagation speed and sensor position errors[J]. *IEEE Communications Letters*, 2020, 24(5): 1024-1027.
- [17] QI H N, WU X P, JIA L Q. Semidefinite programming for unified TDOA-based localization under unknown propagation speed[J]. *IEEE Communications Letters*, 2020, 24(9): 1971-1975.
- [18] ZHANG B B, HU Y C, WANG H Y, et al. Underwater source localization using TDOA and FDOA measurements with unknown propagation speed and sensor parameter errors[J]. *IEEE Access*, 2018, 6(7): 36645-36661.

- [19] TAN H P, DIAMANT R, SEAH W K G, et al. A survey of techniques and challenges in underwater localization [J]. Ocean Engineering, 2011, 38(10): 1663-1676.
- [20] VIBERG M, OTTERSTEN B. Sensor array processing based on subspace fitting[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1991, 39(5): 1110-1121.

作者简介



王 鼎 男, 1982年10月出生于安徽省芜湖市. 现为中国人民解放军战略支援部队信息工程大学信息工程学院副教授, 博士生导师. 主要研究方向为无线信号定位、阵列信号处理.
E-mail: wang_ding814@aliyun.com



尹洁昕(通讯作者) 女, 1989年8月出生于河南省郑州市. 现为中国人民解放军战略支援部队信息工程大学信息工程学院讲师, 硕士生导师. 主要研究方向为无线信号定位、阵列信号处理.
E-mail: Cindyin0807@163.com



郑娜娥 女, 1984年7月出生于福建省漳州市. 现为中国人民解放军战略支援部队信息工程大学数据与目标工程学院讲师. 主要研究方向为无线信号定位、雷达信号处理.
E-mail: 13837122426@163.com



聂福全 男, 1972年2月出生于河南省洛阳市. 现为卫华集团有限公司教授级高级工程师, 博士生导师, 国家万人计划领军人才. 主要研究方向为工程机械设计、目标定位.
E-mail: lyywlnyx@sina.com